Concursul Fractal

Prima Ediție, 10 Noiembrie 2024

Problema 1. Să se arate că numărul 1234567890987654321 nu este prim.

Soluție: Conform criteriului de divizibilitate la trei sau nouă, observăm că suma cifrelor numărului dat este egală cu 90, deci acesta este divizibil cu 3, iar prin urmare, numărul este compus. De asemenea, conform criteriului de divizibilitate la unsprezece, am putea arăta că numărul este divizibil cu 11.

Problema 2. Viorel participă la un concurs de matematică cu 50 de probleme. Pentru fiecare problemă la care acesta a răspuns corect, el primește câte 4 puncte, iar pentru fiecare problemă la care a răspuns greșit, pierde câte 1 punct. Dacă Viorel a răspuns la fiecare problemă și a obținut 65 de puncte, câte probleme a rezolvat el corect?

Soluție: Răspunsul este 23. Vom utiliza metoda falsei ipoteze.
Dacă Viorel ar fi rezolvat toate cele 50 de probleme, ar fi obținut $4 \times 50 = 200$ puncte. Pentru fiecare problemă rezolvată greșit, el pierde $4 + 1 = 5$ puncte, deoarece pierde 4 puncte pe care le-ar fi câștigat și încă 1 punct. Deci, din totalul de 200 puncte, lui Viorel îi lipsesc $200 - 65 = 135$ puncte, iar $135 : 5 = 27$ este numărul de probleme rezolvate greșit. Astfel, numărul de probleme rezolvate corect este $50 - 27 = 23$.

Problema 3. Poate oare numărul $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ să fie un pătrat perfect?

Soluție: Răspunsul este NU. Observăm că numărul nostru este egal cu $100a + 10b + c + 100b + 10c + a + 100c + 10a + b$, adică $111(a + b + c)$. Dacă acest număr ar fi pătratul unui număr natural, fie n, am avea $n^2 = 111(a + b + c)$. Totuși, 111 are ca divizori primi doar pe 37 și 3, deci 37 trebuie să îl dividă pe n. Astfel, 37^2 trebuie să îl dividă pe n^2, iar prin urmare 37 trebuie să îl dividă pe $a+b+c$. Totuși, $a+b+c$ este cel mult $9+9+9 = 27$, ceea ce duce la o contradicție, deoarece 37 nu poate divide un număr mai mic sau egal cu 27.

Problema 4. Paginile unei cărți sunt numerotate începând cu 1. Numărul de pagini al acestei cărți are trei cifre. Este oare posibil ca suma numerelor de pe toate paginile cărții să se împartă fără rest la numărul de cifre folosite pentru numerotarea tuturor paginilor din acea carte?

Soluție: Să presupunem că cartea are n pagini. Conform formulei pentru suma Gauss, suma numerelor de pe pagini este $\frac{n(n+1)}{2}$. Putem număra numărul total de cifre folosite pentru numerotarea paginilor astfel: $9 \times 1 + 90 \times 2 + (n - 99) \times 3$, adică $3n - 108$. Condiția cerută devine că $2(3n - 108)$ trebuie să dividă $n(n + 1)$, ceea ce implică faptul că $n - 36$ trebuie să îl dividă pe $n(n + 1)$. Folosind identitatea $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$, obținem că $n^2 + n - 36^2 - 36 = (n - 36) + (n - 36)(n + 36)$, și cum $n^2 + n$ este divizibil cu $n - 36$, avem că $n - 36$ trebuie să dividă $36^2 + 36 = 37 \times 36$. Cum n este cel puțin 100, $n - 36$ nu poate să îl dividă pe 36 în întregime, deci acesta trebuie să fie egal cu 37 înmulțit cu un divizor al lui 36. Totuși, verificând în relația inițială, niciun astfel de număr nu satisface condițiile, deci răspunsul este NU.